Журнал правовых и экономических исследований.
Journal of Legal and Economic Studies, 2017, 2: 160–165

УДК 330.342:51

V.U. Dorofeev
CREATION OF FUNCTION OF THE STATE OF ECONOMIC SYSTEM

Vyacheslav Dorofeev – senior lecturer at the Department of Higher Mathematics, Saint-Petersburg State University of Economics, PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Saint-Petersburg; **e-mail: friedlab@mail.ru**.

The author proposes a mathematical techniques for the study of economic system. Within the framework of the proposed techniques the model of comparing the product price and quantity is being reviewed with the function of the state of economic system being created. It shows that every economic system has some new feature being referred to as "energy" and the interaction of two economic systems on the same commodity market with different energies results in periodic changes in the state of the system, which is caused by decrease and growth in the product quantity followed by simultaneous relevant change in their price.
Keywords: *economic system; quantization; Poisson bracket; mathematical technique; economic system sustainability factor; price; product quantity; energy; cyclical changes frequency; function.*

В.Ю. Дорофеев
ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Вячеслав Юрьевич Дорофеев – доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент, г. Санкт-Петербург; **e-mail: friedlab@mail.ru**.

Автором статьи предложен математический аппарат исследования экономической системы. В рамках предлагаемого аппарата рассматривается модель соотношения цены и количества товара и строится функция состояния экономической системы. Показано, что всякая экономическая система обладает некоторой новой характеристикой, обозначенной термином «энергия», и взаимодействие двух экономических систем на одном рынке товаров с различными энергиями приводит к периодическим изменениям состояния системы, обусловленных уменьшением и ростом количества товара с одновременным соответствующим изменением их цены.
Ключевые слова: *экономическая система; квантование; скобки Пуассона; математический аппарат; фактор устойчивости экономической системы; цена; количество товара; энергия; частота циклических изменений; функция.*

Введение. Классическая модель математического описания экономических явлений обычно предполагает указание численных соотношений между параметрами задачи. Например, надо знать матрицу затрат или платёжную матрицу как наборы чисел, указать вид функции полезности или функции спроса как некоторый график, то есть опять же как набор чисел на плоскости и т.п. Но результат обычно оказывается зависящим от случайных факторов, и для большей адекватности модели приходится использовать вероятностный характер вводимых величин. Вид вероятностных законов распределения случайных величин приходится задавать самостоятельно, исходя из дополнительных соображений. Имеются попытки решить данную проблему, меняя булеву логику на логику с принципом дополнительности [3]. С другой стороны, имеется хорошо разработанный математический аппарат, для которого функция распределения является решением некоторой особой математической формулировки задачи. Это аппарат квантования, суть которого состоит в замене алгебры параметров задачи с числовых величин на операторные. Тогда соответствующие функциональные уравнения заменяются на операторные, а решением операторных уравнений оказываются функции, модуль квадрата которых как раз и является функцией распределения.

Общая формулировка математической модели. Математически конструкция выглядит следующим образом:

– вводятся основные параметры системы, которые рассматриваются как переменные величины;

– для этих параметров определяется правило коммутирования. Фактически необходимо понять: могут ли эти параметры быть собственными значениями одной и той же функции состояния экономической системы. Экономически это можно понимать так: если реализовано численное значение одного параметра, то может ли быть реализовано точное значение другого параметра. Если ответ положительный, то параметры считаются коммутирующими. Если ответ отрицательный, то задаются коммутационные соотношения между ними. По виду коммутационных соотношений составляется представление задачи;

– определяется либо некоторая инвариантная величина всей системы в целом, либо так называемый гамильтониан системы, то есть величина, относительно которой составляются уравнения движения. Гамильтониан строится в новом представлении переменных величин как естественный аналог классических уравнений системы. Заметим, что в этой статье реализован гамильтонов формализм;

– решением гамильтоновых уравнений являются функции состояния экономической системы, которые должны удовлетворять условию нормировки на единицу. Природа этого условия понятна из следующих соображений: состояние системы в представлении параметров-операторов является оператором. Данный оператор определяется на множестве функций, которые называются функциями состояния Ψ. Пусть над пространством функций Ψ определено дуальное пространство Ψ^* относительно некоторого линейного преобразования $l(\Psi)$. Это может быть норма $\Psi^*\Psi$, линейная по каждому из переменных. Взяв в качестве нормы $\Psi^*\Psi$ интеграл по всему пространству переменных и нормировав его на единицу, получим указанный выше смысл функции состояния – квадрат её модуля определяет вероятность нахождения системы в состоянии Ψ с фиксированными значениями параметров.

Формулировка классической математической модели. Рассмотрим экономическую систему, которая описывается объёмом продукции $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Тогда за время $dt = t_2 - t_2$ продукт q_k будет куплен в объёме dq_k/dt. Поэтому цену продукции $p = (p^1, p^2, \ldots, p^n)$ определим следующим образом:

$$p^k = \sum_{j=1}^{n} m^{kj} \frac{dq_j}{dt}, \tag{1}$$

где m^{ik} – матрица коэффициентов пропорциональности. Фактически количество продукта и его цена имеют смысл желания продать товар и возможности его купить. Если возможность купить обусловлена только ценой, а желание продать – количеством продукта, то при увеличении количества продукта для продажи необходимо уменьшить цену продукта, поэтому можно определить функцию $U(q)$ следующим образом:

$$\frac{dp^k}{dt} + \frac{\partial U(q)}{\partial q_k} = 0 \tag{2}$$

(Роль функции $U(q)$ может играть функция спроса или функция предложения, представленные в соответствующем виде. Конкретный её вид определяется постановкой задачи. В дальнейшем назовём её функцией влияния. Уравнение (2) в лагранжевом формализме получается как требование на экстремум некоторой инвариантной величины. Математически аппарат хорошо разработан [1], поэтому здесь воспользуемся некоторыми готовыми результатами этого аппарата.) Вместо детерминированных уравнений (1 – 2) можно воспользоваться гамильтоновым формализмом. Для этого возьмём так называемый гамильтониан системы H

$$H = \frac{1}{2} p^2 m^{-1} + U(q) \quad , \tag{3}$$

для которого вводятся скобки Пуассона:

$$(P,Q) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial P}{\partial q_k} \frac{\partial Q}{\partial p^k} - \frac{\partial Q}{\partial q_k} \frac{\partial P}{\partial p^k} \right) \tag{4}$$

Тогда уравнения (1 – 2) примут вид (точка сверху означает полную производную по времени):

$$\dot{p}^k = (p^k, H), \quad \dot{q}_k = (q_k, H), \quad \delta_j^k = (q_j, p^k). \tag{5}$$

Если система консервативна, то есть явно не зависит от времени, то гамильтониан H системы соответствует постоянной энергии E системы. Как видно из уравнения (3), постоянная энергия системы E без функции влияния – это половина квадрата её цены (считаем $m = 1$).

Переменные p и q в таком подходе рассматриваются как дополнительные. Оказывается, что можно увидеть прямую аналогию физических переменных p и q и экономических величин p и q, введённых ранее. На это указывает то, что дополнительная информация о деятельности фирмы может привести к серьёзным для неё последствиям. Приведём такой пример [4]: когда достоянием гласности стали известны издержки фирмы «Мацусита Дэнки» (заявлялись большими, а они оказались малыми), то разразился скандал, возникли движения среди покупателей за уменьшение цены на её продукцию, приведшие к успеху. Классическое описание экономической модели, в том числе и описанной выше, осуществляется числовыми характеристиками с установлением уравнения движения, но из приведённого выше примера следует, что параметры цены и её объёма являются дополнительными. Чтобы учесть принцип дополнительности, необходимо провести процедуру квантования классических уравнений в соответствии с правилами квантования. Это означает следующее [2]:

Построение квантовой математической модели.

1. Все числовые переменные (c – числа) заменяются на операторы (q – числа), уравнения (3 – 5) заменяются на квантованные по правилу:

$$\dot{c} = \{\,,\} \to i\dot{c} = [\,,\,], \qquad \{p, q\} = 1 \to [p, q] = \frac{h}{i} \tag{6}$$

Так как уравнения (5) имеют динамический смысл, то (6) необходимо дополнить:

$$H \to i \frac{h}{c} \partial_t , \tag{7}$$

где h, c – безразмерные постоянные. Необходимы именно обе постоянные, так как правила коммутации (6) не обязательно совместимы с одной и той же постоянной в (7). Это также обусловлено различной размерностью переменных количества товара q и времени t.

2. Состояние системы после квантования описывается волновой функцией $\Psi = \Psi(q)$, которая является решением квантованных уравнений (3) и удовлетворяет принципу суперпозиции, то есть: если Ψ_1 и Ψ_2 – решения квантованных уравнений (3), то и $\Psi = \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2$ – также решение этих уравнений для любых вещественных чисел α и β. Волновая функция имеет смысл плотности вероятности нахождения в состоянии с q, а квадраты коэффициентов α и β – вероятности состояний Ψ_1 и Ψ_2 соответственно и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. При этом каждая из функций Ψ_1 и Ψ_2 нормирована единицу.

3. Чтобы задать алгебру операторов p^k и q_k, можно воспользоваться представлением, согласно которому:

$$q_k = q_k , \quad p^k = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial q^k} \tag{8}$$

4. Реализация операторов на состояниях Ψ приводит к их наблюдаемым значениям $p^k = \int dq \Psi^*(q) p^k \Psi(q)$.

Интересен смысл постоянной h. Чем она больше, тем существенней разрыв между знаниями о количестве товара и его цене. В плановой экономике, когда всё известно заранее, разрыва между значениями q и p нет. Обе величины могут быть собственными значениями состояния экономической системы. В этом случае q-числа превращаются в обычные числа, а математическое описание системы оказывается исключительно классическим. Таким образом, квантовое описание системы допустимо только к рыночной экономической системе, когда цена товара формируется не как детерминированный фактор, определяемый затратами, а как фактор экономической системы в целом. В дальнейшем станет понятно, что речь идёт о факторе устойчивости экономической системы, что определяется её наиболее вероятным состоянием.

Сделаем ещё одно замечание. Вместо классических вещественных уравнений на взаимосвязь параметров экономической модели мы вводим в уравнениях (6 – 8) комплексные величины. На самом деле это необходимо, так как в предлагаемом подходе численными параметрами модели являются собственные значения соответствующих операторов. Операторы в предлагаемом здесь подходе представляются как дифференциальные операторы. Для того, чтобы собственные значения дифференциальных операторов были вещественны, необходимо потребовать эрмитовость этих операторов. А это, в свою очередь, требует обобщения алгебры до комплексной.

Рассмотрим для примера уравнения (3), в котором $U = 0$. Получим:

$$\frac{1}{2} p^2 m^{-1} \Psi = H\Psi \cdot \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что энергия E этой системы, равная собственному значению оператора H, сохраняется, и решение Ψ имеет вид: $\Psi(t,p) = \Psi_0 e^{iEct/h}$ (Ψ_0 – постоянная). Следовательно, вероятность того, что система в момент времени t находится в состоянии с количеством товара, равного q, есть $|\Psi(t,q)|^2 = |\Psi_0|^2$, то есть при отсутствии влияния цены на количество товара система равновероятно может иметь любое значение цены. Величина цены остаётся неизменной во времени.

Поймём результат и попытаемся увидеть в нём что-то новое, если оно есть, учитывая привлечение нового аппарата исследования. Теперь система описывается функцией состояния Ψ. Эта функция характеризует систему через заложенные параметры описания системы. Параметры описания системы – количество товара и его цена. Количество товара – величина ни на что не влияющая. Такое возможно, если количество товара бесконечно много с нулевыми затратами. Тогда цена может быть любой и устанавливается в зависимости от желания продавца. Есть ли что-то новое? Да, есть. Возникает новая характеристика самой системы – половина квадрата её цены, равная $)p^2 m^{-1} = E$ (величину m^{-1} положим здесь равной единице). E – это своеобразные накопления мощности системы за счёт цены; в дальнейшем будем называть ее энергией экономической системы. Чем больше энергия системы, тем она устойчивей. Эти рассуждения следуют из физической интерпретации решения. С другой стороны, понятно, что чем выше цена, тем лучше для продавца. Отсюда возникает ещё один вывод: уравнение (9) описывает систему продавца товара, то есть выгодная цена рассматривается с точки зрения продавца.

Экономическая система с функцией влияния. Уравнение (2) определяет изменение цены в зависимости от некоторой функции влияния $U(q)$, зависящей от двойственного параметры цены – его объёма q. В контексте данной работы ограничимся физическими аналогами потенциальных физических взаимодействий, для которых хорошо разработаны методы решения, так как в общем случае уравнения (2) имеют непростые решения. Пусть это будет так называемый центральный потенциал:

$$U(q) = -\frac{Q}{q+a} + U_0 \quad , \qquad (10)$$

который достаточно логичен как фактор количества товара, влияющего на цену товара. Подставим (10), (8) и (7) в (3):

$$\left(-\frac{1}{2} h^2 m^{-1} \frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{Q}{q+a} + U_0\right)\Psi = i\frac{h}{c}\partial_t \Psi \qquad (11)$$

Решения (11) зависят от времени как $e^{-iEct/h}$. Так как главной характеристикой состояния системы является её модуль, а модуль $e^{-iEtc/h}$ равен единице, то время исчезает, и решения для состояния системы оказываются стационарными. Представим их в виде $\Psi = e^{-iEt/h}\ \Psi_0(q+a)$. Вводя обозначения $\frac{2mE}{h^2} - U_0 = \varepsilon,\quad \frac{mQ}{h^2} = Z,\quad \rho = q + a > 0$, получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon + \frac{2Z}{\rho}\right)\Psi = 0 \cdot \qquad (12)$$

Решения (12) хорошо известны [2]. Если $\varepsilon > 0$, то они имеют непрерывный спектр (это означает что решения Ψ определены для любого значения $\varepsilon > 0$), то есть значения параметра ε произвольные положительные числа, но функция Ψ неограниченная. Если $\varepsilon < 0$, то решения имеют дискретный спектр и ограниченные значения функций $\Psi_n(q)$, удовлетворяют условию квантования: $\varepsilon_n = -Z^2/n$, где n – любое натуральное число, и непрерывный спектр для всех других неограниченных решений (для простоты в (11) считаем параметр m числом). Для случая дискретного спектра, когда $n = 1, 2$ при больших значениях q, получим, что вероятность нахождения системы в состоянии Ψ_1 или Ψ_2 определяется формулами [2. С. 212]:

$$\begin{cases} w_1 = N_1 Z^2 (q+a)^2 e^{-2Z(q+a)} \\ w_2 = N_2 Z^4 (q+a)^4 e^{-Z(q+a)} \end{cases}. \qquad (13)$$

где N_1 и N_2 – нормировочные постоянные. Функций w_i определяют вероятность того, что на рынке имеется количество q товара.

Непрерывный спектр указывает на следующее: если энергия системы велика, что было видно из приведённого ранее примера, – это обусловлено высокими ценами, и в систему нельзя включать функцию влияния, так как решения оказываются не нормируемы, то есть интеграл модуля решения равен бесконечности. Таким образом, высокие цены – это вещь в себе. Они возникают как самостоятельные решения вне экономического содержания задачи. Интересным в данном случае оказывается то, что этот факт связан именно с высокими ценами. Можно было бы подумать, что внеэкономическое решение – это цена любая. Оказывается, что нет. Действительно, низкая цена приведёт к быстрой распродаже товара и, как следствие, к принципиальному изменению состояния системы. Тем самым получен качественный вывод, который не может следовать ни из одной классической экономической модели потому, что все известные экономические модели не рассматривают экономическую систему как функцию состояния этой системы.

Пусть теперь энергия системы мала. В этом случае получаем дискретный спектр решений (12) в виде (13). Таким образом, состояние системы описывается набором устойчивых решений, нумеруемых натуральным параметром n. Каждое n соответствует своему ε. Благодаря постоянной U_0 энергия E состояния системы Ψ оказывается положительной. Чем меньше n, тем меньше энергия. Чем больше n, тем больше энергия.

Рассмотрим самое маленькое $n = 1$. Соответствующая функция состояния экономической системы Ψ определяет вероятность этого состояния w_1. Наиболее вероятное значение количества товара q этого состояния получается из равенства $Z(q + a) = 1$. Вероятность состояния системы с таким значением q равно N_1e^{-2}. Вероятность состояния системы при n = 2 с наиболее вероятным значением q, получаемого из равенства $Z(q + a) = 4$, оказывается $N_2 4^4 e^{-4}$. Учитывая $N_1=4$, $N_2=1/4!$ получаем вероятность с меньшим значением $n = 1$, примерно в 4 раза более высокую, чем при $n = 2$. Приходим к выводу, что состояние системы с меньшим количеством товара более вероятно. Таким образом, для устойчивости экономической системы необходимо выбирать наименьшее значение количества товара. Его увеличение приводит к росту энергии экономической системы. Чем больше количество товара, тем выше энергия системы и меньше его цена. При этом система становится всё менее устойчивой, так как наиболее устойчивое состояние системы соответствует минимальному значению энергии экономической системы.

Кризисы в квантовой экономике. Рассмотрим два решения (12) $\Psi_1(t, q)$ и $\Psi_2(t, q)$, которые соответствуют разным значениям энергии экономической системы E и E'. Предположим для простоты, что решения в выделенном секторе имеют одинаковое распределение по q, например,

$$\Psi_1(t,q) = e^{-iEct/hc}\,\Psi(q), \quad \Psi_2(t,q) = e^{-iE'ct/h}\,\Psi(q). \qquad (14)$$

Если экономическая система может находиться с вероятностью α^2 в состоянии $\Psi_1(t, q)$ и с вероятностью β^2 – в $\Psi_2(t,q)$, то для экономической системы в целом общее решение $\Psi(t,q)$ согласно квантовому принципу суперпозиции получается как сумма Ψ_1 (t, q) и Ψ_2 (t, q) с весами α и β соответственно: $\Psi(t, q) = \alpha\Psi_1(t, q) + \beta\Psi_2(t, q)$. Вероятность нахождения экономической системы *w(t,q)* в состоянии Ψ(t, q) со значением количества товара в количестве *q* в момент времени *t* находится, как квадрат модуля функции Ψ(t, q)

$$w(t,q) = (1 - 2\alpha\beta \sin^2 \frac{E - E'}{2h} ct) w(q) \quad (15)$$

Из уравнения (15) видим, что вместо стационарного распределения *w* получается периодическое во времени распределение. Рассмотрим экономический смысл полученного решения.

Экономическая система является суммой двух подсистем с одинаковым распределением производимого продукта, но с различной энергией и, следовательно, различной ценой. Это приведёт к тому, что с течением времени вероятность нахождения экономической системы с данным значением количества товара *q* меняется со временем циклически. Если различие цен товара двух подсистем на одном рынке велико, то велико и различие энергий системы, что увеличит частоту циклических изменений. Глубина циклических изменений вероятности состояний *w(t, q)* зависит от пропорции соотношения на рынке двух подсистем. В случае максимального значения $2\alpha\beta = 1$ в какой-то момент времени товар может совсем исчезнуть с рынка. Это будет обусловлено разновекторным изменением цен. Ситуация с исчезновением товара для экономической системы – плоха. Понятно, что уменьшение прибыли экономической системы уменьшает её инвестиционные возможности. Поэтому будем понимать такое поведение экономической системы как её кризис. С другой стороны, сама модель предлагает решение данного явления: достаточно сделать одинаковыми энергии систем, чтобы их разность оказалась равной нулю, что уберёт временную цикличность. Таким образом, кризисные явления экономической системы здесь рекомендуется решать посредством регулирования цен на товары либо государственным регулированием, что, впрочем, согласно общему подходу в этой работе превращает квантовую экономику (фактически являющуюся синонимом рыночной экономики) в государственную, либо предлагает в рамках рыночной экономики договориться обоим участникам экономической системы об общих правилах. Третий вариант решения проблемы – монополизация рынка одним из игроков. В этом случае значение $2\alpha\beta$ минимально. Случай большого числа игроков здесь не рассматривается, но представляется интересным, как и рассмотрение инвестиционных возможностей не внутренних, а внешних по отношению к описываемой системе факторов.

Заключение. Предложенный в этой работе метод исследования экономики с помощью квантового подхода, позволяющий ввести новую характеристику всей экономической системы в целом на основе дополнительных переменных, естественно назвать квантовой экономикой. В качестве дополнительных переменных предлагается использовать количество товара и цену этого товара. При этом цена товара определяется самостоятельно – как скорость продажи товара. В работе предложен только начальный уровень исследования, демонстрирующий возможности предлагаемого аппарата. Однако уже такой уровень показывает содержательность нового аппарата. Поиск конкретной экономической ниши, в которой данный математический аппарат окажется уникальным, требует дополнительных исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1983.

2. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. М.: Наука, 1983. С. 203–212.

3. *Гриб А.А., Парфёнов Г.Н.* Квантовая логика, игры и равновесия // Теоретическая и математическая физика. 2011. Т. 169. № 2. С. 259–271.

4. *Цветов В.* Чёрная магия Мацуситы. М.: П.Л., 1975. С. 27.