Журнал правовых и экономических исследований.
Journal of Legal and Economic Studies, 2018, 3: 138–143
© Ю.Г. Ермаченко, 2018

УДК 330.45

Yu.G. Yermachenko
SERVICE IN SYSTEM WITH IMPATIENT ORDERS

Julia Yermachenko – senior lecturer, the Department of Higher Mathematics, St. Petersburg State University of Economics, PhD in Economics, associate professor, St. Petersburg; **e-mail: dekanat205@yandex.ru**.

We research the performance dynamics of multi-channel service system. We consider a multi-channel system with a finite queue where an incoming order remains with the probability depending on the length of the queue. We apply mathematical methods to solve the problem in question in case of variable incoming orders flow. We demonstrate a stationary working mode and calculate many probability, natural and time characteristics of the service system in question on the basis of stationery state probability.

Keywords: *queuing system; multi-channel system; queue in the system with impatient orders; length of order queue; variable incoming orders flow.*

Ю.Г. Ермаченко
ОБСЛУЖИВАНИЕ В СИСТЕМЕ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ

Юлия Германовна Ермаченко – доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный экономический университет», кандидат экономических наук, доцент, г. Санкт-Петербург; **e-mail: dekanat205@yandex.ru**.

Статья посвящена исследованию динамики функционирования многоканальной системы массового обслуживания. Рассматривается многоканальная система обслуживания с конечной очередью, в которой поступающая заявка остается с вероятностью, зависящей от длины очереди. Проводится математическое решение данной задачи для случая переменного входящего потока заявок. Показано существование стационарного режима работы, получены стационарные вероятности состояний, с помощью которых рассчитаны многие вероятностные, натуральные и временные характеристики рассматриваемой системы массового обслуживания.

Ключевые слова: *система массового обслуживания; многоканальная система обслуживания; очередь в системе с нетерпеливыми заявками; длина очереди заявок; переменный входящий поток заявок.*

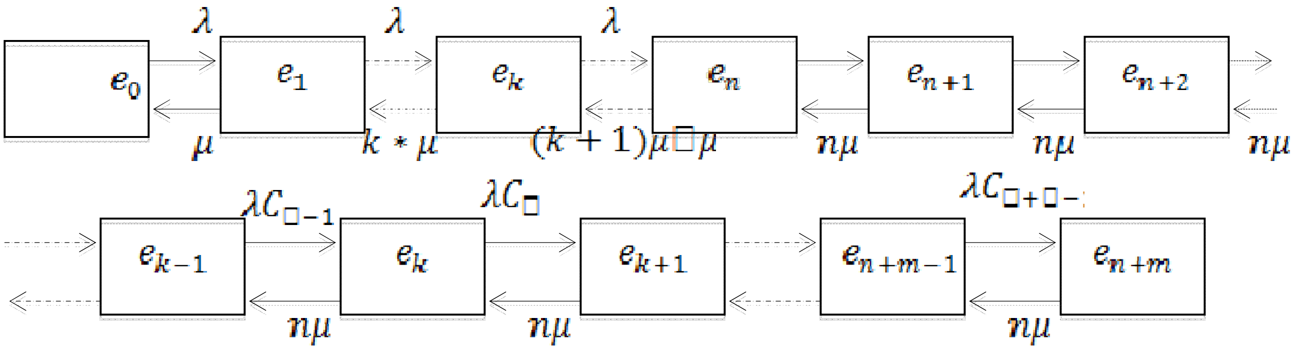
1. Постановка задачи.

В работе проведен анализ многоканальной системы массового обслуживания (далее – СМО) с конечной очередью с пуассоновским входным потоком и экспоненциальным обслуживанием. Заявки, поступающие в систему при занятости всех каналов, могут проявить нетерпение и отказаться от обслуживания, разрежая входящий поток. Заявки, приходящие на полностью занятую систему, теряются.

Пусть интенсивность входящего потока – λ, интенсивность обслуживания – μ, в системе n каналов обслуживания и m мест ожидания в очереди. Обозначим □$_k$ состояния системы, в которой на обслуживании и в очереди находятся всего k заявок, $k=\overline{0,n+1}$. При $k=\overline{0,n}$ – бункер для ожидающих обслуживания заявок пуст, при $k=\overline{n,n+m}$ в очереди ожидает обслуживания $e=k-n$ заявок, $e=\overline{0,m}$. В последнем случае новая заявка пополняет очередь с вероятностью C_k, так что входящий в систему поток на обслуживание имеет интенсивность λC_k, $C_k \in [0,1]$.

Естественно считать, что чем больше очередь, тем с меньшей вероятностью новая заявка ее пополняет, так что C_k убывают с ростом k, но это непринципиально. Такая постановка обобщает задачу, рассмотренную в [4].

Граф переходов по состояниям



2. Математическая модель

Так как все интенсивности переходов постоянны, то процесс смены состояния марковский с непрерывным временем и конечным фазовым пространством состояний e_k, $k=\overline{0,n+m}$[1], [5]. Переходные вероятности на $(t,t+\Delta t)$ в соседнее состояние не зависят от t, имеют порядок Δt, в другие порядок - $(\Delta t)^2 = 0(\Delta t)$. Запишем их.

$$P_{k\,k+1}^{(\Delta t)} = \begin{cases} \lambda\Delta t + 0(\Delta t), & k=\overline{0,n-1}\,, \\ \lambda C_k \Delta t + 0(\Delta t), & k=\overline{n,n+m-1}\,, \end{cases}$$

$$P_{k\,k-1}^{(\Delta t)} = \begin{cases} k\mu\Delta t + 0(\Delta t), & k=\overline{1,n-1}\,, \\ n\mu\Delta t + 0(\Delta t), & k=\overline{n,n+m}\,. \end{cases}$$

Вероятности не изменить – состояние за Δt равны

$$P_{00}(\Delta t) = 1 - P_{01}(\Delta t),$$

$$P_{\square\square}(\Delta t) - 1 - P_{kk+1}(\Delta t) - P_{kk-1}(\Delta t), \qquad k - \overline{1,n+m-1},$$

$$P_{n+m\;n+m}(\Delta t) - 1 - P_{n+m\;n+m-1}(\Delta t),$$

$$P_{ik}(\Delta t) = 0(\Delta t), |i-k| \geq 2, \quad i,k = \overline{0,n+m}.$$

Выпишем вероятности состояний в момент $t+\Delta t$ с учетом возможных переходов на элементарном промежутке Δt:

$$\square_0(t+\Delta t) = P_0(t)P_{00}(\Delta t) + P_1(t)P_{10}(\Delta t),$$

$$P_k(t+\Delta t) = P_{k-1}(\Delta t)P_{k-1k}(\Delta t) + P_k(\square)P_{kk}(\Delta t) + P_{k+1}(t)P_{k+1k}(\Delta t),$$
$$k = \overline{1,n-1},$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_{n-1}(t)P_{n-1n}(\Delta t) + P_n(t)P_{nn}(\Delta t) + P_{n+1}(t)P_{n+1n}(\Delta t),$$
$$P_k(t,t+\Delta t) = P_{k-1}(t)P_{k-1k}(\Delta t) + P_k(t)P_{kk}(\Delta t) + P_{k+1}(t)P_{k+1k}(\Delta t), k = \overline{n+1,n+m-1},$$

$$P_{n+m}(t+\Delta t) = P_{n+m-1}(t)P_{n+m-1\;n+m}(\Delta t)) + P_{n+m}(t)P_{n+m\;n+m}(\Delta t).$$

Подставим значения переходных вероятностей и перенесем $P_k(t)$ в левую часть равенств:

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -P_0(t)\lambda\Delta t + P_1(t)\mu\Delta t + 0(\Delta t),$$

$$P_k(t+\Delta t) - P_k(t) = P_{k-1}(t)\lambda\Delta t - P_k(t)(\lambda + k\mu)\Delta t + P_{k+1}(t)(k+1)\mu\Delta t$$
$$+0(\Delta t), k = \overline{1,n-1},$$

$$P_n(t+\Delta t) - P_n(t) - P_{n-1}(t)\Delta t - P_n(t)(\lambda C_n + n\mu)\Delta t + P_{n+1}(t)n\mu\Delta t + 0(\Delta t),$$

$$P_k(t+\Delta t) - P_k(t) = P_{k-1}(t)\lambda C_{k-1}\Delta t - P_k(t)(\lambda C_k + n\mu)\Delta t +$$
$$P_{k+1}(t)n\mu\Delta t + 0(\Delta t), k = \overline{n+1,n+m-1},$$

$$P_{n+m}(t+\Delta t) - P_{n+m}(t) = P_{n+m-1}(t)\lambda C_{n+m-1}\Delta t - P_{n+m}(t)n\mu\Delta t + 0(\Delta t).$$

Поделим обе части равенств на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. Пределы функций в правых частях равенств существуют, значит, существуют и пределы функций в левых частях равенств. По определению они равны соответствующим производным. Так получили систему дифференциальных уравнений Колмогорова, описывающих динамику рассматриваемой СМО:

$$P_0'(t) - -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)P_k(t) + (k+1)\mu P_{k+1}(t), \qquad k = \overline{1,n-1},$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda C_n + n\mu)P_n(t) + n\mu P_{n+1}(t),$$

$$P_k'(t) = \lambda C_{k-1}P_{k-1}(t) - (\lambda C_k + n\mu)P_k(t) + n\mu P_{k+1}(t), \quad k = \overline{n+1,n+m},$$

$$P_{n+m}'(t) = \lambda C_{n+m-1}P_{n+m-1}(t) - n\mu P_{n+m}(t).$$

Вероятности $P_k(t)$ удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{k=0}^{\square+m} P_k(t) = 1.$$

Процесс перехода по состояниям является Марковским процессом гибели и размножения [2]. Так как фазовое пространство конечно, то стационарный режим существует при любых конечных значениях параметров.

3. Стационарные вероятности

Система уравнений для стационарных вероятностей

$$\mathrm{P}_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$$

Имеет вид

$$\lambda\square_0 - \mu P_1 = 0,$$
$$\lambda\square_{k-1} - (\lambda + k\mu)P_k + (k+1)\mu P_{k+1} - 0, \qquad k - 1, n-1,$$
$$\lambda\square_{n-1} - (\lambda C_n + n\mu)P_n + n\mu P_{n+1} = 0,$$
$$\lambda C_{k-1}P_{k-1} \quad (\lambda C_k \mid n\mu)P_k \mid n\mu P_{k+1} = 0, \quad k = \overline{n \mid 1, n \mid m \quad 1},$$
$$\lambda\square_{n+m-1}P_{n+m-1} - n\mu P_{n+m} = 0.$$
$$\sum_{k=0}^{\square+m} P_k - 1.$$

Решаем систему заменой искомых неизвестных на P_k на новые Z_k. Положим

$$Z_k = \lambda P_{k-1} - k\mu P_k, \qquad k = \overline{1,n},$$
$$Z_k^* = \lambda C_{k-1}P_{k-1} - n\mu P_k, \qquad k = \overline{n+1, n+m}.$$

Запишем систему в новых неизвестных:

$$\mathrm{Z}_1 = 0,$$
$$\mathrm{Z}_k - \mathrm{Z}_{k+1} = 0, \qquad k = \overline{2, n-1},$$
$$Z_n - Z_{n+1}^* = 0,$$
$$Z_k^* - Z_{k+1}^* = 0, \qquad k = \overline{n+1, n+m-1},$$
$$Z_{k+m}^* = 0,$$

или

$$\mathrm{Z}_1 = 0,$$
$$Z_k = Z_{k+1}, \qquad k = \overline{2, n-1},$$
$$Z_n - Z_{n+1}^*,$$
$$Z_k^* = Z_{k+1}^*, \qquad k = \overline{n+1, n+m-1},$$
$$Z_{n+m}^* = 0.$$

Рекуррентно получаем тривиальные решения системы

$$Z_k = 0, \qquad k = \overline{1,n},$$
$$Z_k^* = 0, \qquad k = \overline{n+1, n+m}.$$

Отсюда имеем для исходных неизвестных P_k соотношения

$$\lambda\square_{k-1} = k\mu P_k, \quad k = \overline{1,n},$$
$$\lambda C_{k-1}P_{k-1} = n\mu P_k, k = \overline{n+1, n+m}.$$

Положим $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Тогда

$$\square_k = \frac{\rho}{k}P_{k-1}, \qquad k = \overline{1,n},$$
$$\square_k = \frac{\rho}{n}C_{k-1}P_{k-1}, \qquad k = \overline{n+1, n+m}.$$

Выразим последнюю вероятностью через P_n:

$$P_k = \left(\frac{\rho}{n}\right)^{k-n} r_{k-1}P_n,$$

где $\square_{k-1} = \prod_{i=n}^{k-1} C_i, \ k = \overline{n+1, n+m}$.

Рекуррентно находим вероятности состояний $\square_k$ через начальную вероятность $\square_0$:

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} = \square_0, \qquad k = \overline{1,n},$$
$$P_k = \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k r_{k-1}\square_0, \quad k = \overline{n+1, n+m}.$$

Значение начальной вероятности $\square_0$ получаем из условия нормировки

$$\sum_{k-0}^{\square+m} P_k = 1.$$

Распишем эту сумму на две. Тогда

$$P_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{p^k}{k!} + \frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k r_{k-1} \text{ и}$$
$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!} + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{k=n+1}^{n+m}\left(\frac{\rho}{n}\right)^k r_{k-1}\right)^{-1}.$$

Стационарные вероятности состояний системы получены. Для практических расчетов удобнее применять рекуррентные формулы.

4. Число обслуженных и потерянных заявок

Стационарные вероятности P_k можно трактовать как среднюю долю времени, проводимую системой в состоянии $\square_k$ за время t, когда $t \to \infty$. Если за единицу времени принят один час, то в среднем установившемся режиме в течение часа система пребывает в состоянии $\square_k$, время $\square_k = P_k, k = \overline{0, n+m}$.

Найдем среднее число обслуженных заявок и заявок потока, не поступивших на обслуживание в течение часа работы системы.

В среднем за час на свободную систему за время t_0 поступает λt_0 заявок. Все они будут обслужены. В состоянии $\square_k$ при занятости k каналов за время t_k поступят в систему λt_k заявок. При $k \le n-1$ они все также будут обслужены без ожидания в очереди. В состоянии $\square_n$, когда все каналы обслуживания заняты, за время t_n в очередь на обслуживание поступает уже $\lambda C_n t_n$ заявок потока λ, нетерпеливые отказываются от обслуживания с вероятностью $1 - C_n$. Аналогично заявки, застающие систему в состоянии e_k, $k = \overline{n+1, n+m-1}$, пополняют очередь с интенсивностью λC_k. За время t_k в течение часа их поступает $\lambda C_k t_k$, и все они будут обслужены. Всего в среднем система обслуживает $\mathrm{N}_{обсл} = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda t_k + \sum_{k=n}^{n+m-1}\lambda C_k t_k$ поступивших за час заявок. Не поступают на обслуживание нетерпеливые заявки, их число

$$\sum_{k=n}^{n+m-1}(1-C_k)\lambda t_k,$$

а также заявки, застающие систему в состоянии полной занятости, их число λt_{n+m}.

Всего в среднем не будет обслужено

$$N_{пот} = \sum_{k=n}^{n+m-1}(1-C_k)\lambda t_k + \lambda t_{k+m}$$

заявок, поступивших в систему в течение часа. Среднее число всех заявок потока λ за час равно

$N_{обсл.} + N_{пот.} = \sum_{k=0}^{n-1}\lambda t_k + \sum_{k=0}^{n+m-1}\lambda C_k t_k + \sum_{k=n}^{n+m-1}\lambda(1-C_k)t_k + \lambda t_{n+m}$.

Объединим средние слагаемые и используем условия нормировки, заменяя t_k на P_k. Тогда получим:

$\sum_{k=0}^{n-1}\lambda t_k + \sum_{k=n}^{n+m-1}\lambda t_k + \lambda t_{k+m} = \lambda\sum_{k=0}^{n+m} t_k = \lambda\sum_{k=0}^{n+m} P_k = \lambda$ – интенсивность входящего потока заявок.

5. Характеристики системы обслуживания [3]

● Вероятность простоя системы равна P_0, система в состоянии S_0 не занята обслуживанием.

● Вероятность наличия очереди $P_{оч} = \sum_{k=n+1}^{n+m} P_k$.

● Вероятность потери заявки при полной занятости системы равна P_{n+m}.

● Вероятность потери нетерпеливых заявок, отказавшихся от обслуживания, есть $P_{пот.нетерп} = \sum_{k=n}^{n+m-1} P_k(1-C_k)$.

● Тогда вероятность потери случайной заявки потока

$P_{пот} = P_{пот.нетерп.} + P_{n+m}$.

● Вероятность обслуживания случайной заявки потока $P_{обсл} = 1 - P_{пот.}$.

● Относительная пропускная способность системы $Q = P_{обсл.}$,

есть вероятность обслуживания возможной заявки потока λ.

● Абсолютная пропускная способность А системы – это среднее число заявок потока λ, фактически поступающих на обслуживание в единицу времени.

$A = \lambda P_{обсл}$.

Из них принято без очереди $N_1 = \sum_{k=n}^{n-1}\lambda t_k$ заявок, поступило из очереди $N_2 = \sum_{k=n}^{n+k-1}\lambda C_k t_k$ заявок, так что $N_1 + N_2 = N_{обсл} = A$.

● Каждый канал в единицу времени – один час – обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов, обслуживающих эти А заявок, равно:

$\bar{n}_{зан.} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}P_{обсл}$.,или

$\bar{n}_{зан.} = \rho P_{обсл}$.

Среднее число свободных каналов:

$\bar{n}_{своб} = n - \bar{n}_{зан.}$.

● Нагрузка системы ρ_c равна среднему числу занятых каналов $\rho_c = \bar{n}_{зан.}$

Действительно, в течение часа в систему фактически поступает на обслуживание и обслуживается в среднем А заявок. Время обслуживания одной заявки в среднем равно $\frac{1}{\mu}$. Тогда $A\frac{1}{\mu}$есть среднее число заявок, поступивших на обслуживание за время обслуживания одной заявки, то есть нагрузка системы ρ_c. Из $\rho_c = A\frac{1}{\mu}$и $\bar{n}_{зан.} = \frac{A}{\mu}$ получаем $\rho_c = \bar{n}_{зан.}$.

Коэффициент использования канала ν есть доля занятости одного канала.

$\nu = \frac{\rho_c}{n} = \frac{\rho}{n}P_{обсл.}$.

При $\frac{\rho_c}{n} \geq 1$ коэффициент использования канала полагают равным единице $\nu = 1$. В нашем случае $\nu \leq 1$, так как $\rho_c = \bar{n}_{зан.} \leq n$.

● Пусть e – случайная длина очереди. Ясно, что $e=k-n$, $e = \overline{1,m}$. Средняя длина очереди равна:

$$L = \sum_{e=0}^{m} eP_{n+e}.$$

● Заявка пребывает в системе либо на канале обслуживания, либо в очереди. Значит, среднее число заявок в системе есть:

$N = L + n_{зан.} = L + \rho P_{обсл.}$.

● Обозначив через Т среднее время пребывания случайной заявки в системе, W – среднее время ожидания обслуживания, по формуле Литтла $N = \lambda T$ и $L = \lambda W$ имеем:

$T = \frac{N}{\lambda}$ – среднее время пребывания,

$W = \frac{L}{\lambda}$ – среднее время ожидания обслуживания.

● Тогда среднее время пребывания обслуживания случайной заявки равно

$\overline{t_{обсл}} = T - \square = \frac{N}{\lambda} - \frac{L}{\lambda} = \frac{N-L}{\lambda} = \frac{\overline{\square}_{зан.}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\rho P_{обсл.} или \overline{t_{обсл}} = \frac{1}{\mu} P_{обсл.}$

Основные характеристики работы системы массового обслуживания с нетерпеливыми заявками рассчитаны.

Назначая цену за обслуженную заявку, штраф – за потерянную, можно рассчитывать экономические показатели такой системы.

В качестве примера рассмотрим двухканальную систему с тремя местами ожидания, на которую поступает в среднем 18 заявок в час, обслуживание заявки на канале длится в среднем 6 минут. Заявки занимают места ожидания в зависимости от длины очереди и отказываются от обслуживания. При занятости всех мест ожидания запишем параметры системы:

$n = 2; m = 3; \lambda = 18; \mu = 10; C_2 = 0{,}9;\ C_3 = 0{,}7; C_4 = 0.$

Тогда $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1{,}8;\ \frac{\rho}{n} = \frac{\rho}{2} = 0{,}9.$

Стационарные вероятности равны:

$P_0 = \frac{1}{6{,}9309} = 0{,}1443$ – система свободна,

$P_1 = \rho P_0 = 0{,}2597$ – работает только один из каналов, очереди нет,

$P_2 = \frac{\rho}{2} P_1 = 0{,}2337$ – работают оба канала, очереди нет,

$P_3 = \frac{\rho}{2} C_2 P_2 = 0{,}1893$ – работают оба канала, ожидает обслуживание одна заявка,

$P_4 = \frac{\rho}{2} C_3 P_3 = 0{,}1193$ – работают оба канала, в очереди две заявки,

$P_5 = \frac{\rho}{2} C_4 P_4 = 0{,}0537$ – заняты оба канала и все три места ожидания.

$$\sum_{\square=0}^{5} P_k = 1.$$

Время, проводимое системой в течение часа в состоянии e_k, есть $t_k = P_k$; $\sum_{\square=0}^{5} t_k - 1.$ Таким образом, в течение часа в среднем оба канала свободны $t_0 = 0{,}1443$ $часа = 8{,}7$ $мин.,$ занят один из каналов

$t_1 = 0{,}2597$ $часа = 15{,}5$ $мин.,$ заняты оба канала, очереди нет,

$t_2 = 0{,}2337$ $часа = 14{,}0$ $мин.,$, в очереди ожидает одна заявка $t_3 = 0{,}1893$ $часа = 11{,}4$ $мин.,$ в очереди две заявки

$t_4 = 0{,}1193$ $часа = 7{,}2$ $мин.,$ система занята полностью

$t_5 = 0{,}0537$ $часа = 3{,}2$ $мин.$

Оба канала заняты в среднем $\sum_{\square=2}^{5} t_k = 36$ $мин.$ и $\sum_{\square=3}^{5} t_k = 22$ $мин.,$ в системе есть очередь. При этом $\lambda = 18$ заявок, поступивших в течение часа, обслуживаются сразу по наступлении

$\lambda t_0 + \lambda t_1 = 18 * 0{,}404 = 7{,}272$ заявок;

поступили на обслуживание из очереди $\sum_{\square=2}^{4} \lambda C_k t_k = 18 * 0{,}403 = 7{,}245$ заявок; не остались на свободных местах ожидания и отказались от обслуживания: $\sum_{\square=2}^{4} \lambda(1 - C_k) t_k = 18 * 0{,}140 = 2{,}517$ заявок;

застали занятыми все три места ожидания и ушли необслуженными:

$\lambda \square_5 - 18 * 0{,}0537 - 0{,}966$ заявок.

Соответствующие вероятности равны:

$\square_5 = 0{,}0537$ – вероятность потери заявки при полной занятости системы,

$P_{пот.нетерп.} = \sum_{k=2}^{4} P_k (1 - C_k) = 0{,}1398$ – вероятность потери нетерпеливой заявки,

$P_{пот.} = 0{,}1935$ – вероятность потери случайной заявки,

$P_{обсл.} = 1 - P_{пот.} = 0{,}8065$ – вероятность обслуживания заявки.

$Q = P_{обсл.} = 0{,}8065; A = \lambda Q = 14{,}517$ – относительная и абсолютная пропускная способность системы.

$\overline{\square}_{зан.} = \rho P_{обсл} = 1{,}452; \overline{\square}_{св.} = n - \overline{\square}_{зан.} = 0{,}548$ – среднее число занятых и свободных каналов.

$\rho_c = \overline{\square}_{зан.} = 1{,}452$ – нагрузка системы.

$\nu = \frac{\rho}{n} = 0{,}726$ – коэффициент использования канала.

$L = \sum_{e=0}^{3} e P_{n+e}. = 0{,}589$ – средняя длина очереди.

$N = L + \overline{n}_{зан.} = 2{,}041$ – среднее число заявок в системе.

$T = \frac{N}{\lambda} = 0{,}1134$ $ч = 6{,}8$ $мин$ – среднее время пребывания заявки в системе.

$W - \frac{L}{\lambda} - 0{,}0327$ $ч - 2$ $мин.$ – среднее время ожидания обслуживания.

$\overline{t_{обсл}} = T - \square = \frac{1}{\mu} P_{обсл.} = 0{,}0806$ $ч. = 4{,}8$ $мин.$ – среднее время обслуживания заявки в системе с учетом необслуженных заявок. Оно, естественно, меньше шести минут «чистого» обслуживания на канале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2008. 480 с.
2. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. М.: Издательство ЛКИ, 2013. 400 с.
3. *Ермаков С.М., Кривулин Н.К.* Элементы теории массового обслуживания. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 1998. 88 с.
4. *Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания. М.: Либроком, 2012. 304 с.
5. *Кремер Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ ДАНА, 2010. 551 с.